Analiza modelu Leontiewa z użyciem skierowanych liczb rozmytych [1]

Dariusz Kacprzak
Politechnika Białostocka
Wydział Informatyki
Katedra Matematyki
15-351 Białystok, Wiejska 45A
dkacprzak@interia.pl

1 Wstęp

Ekonomia jest nauką o społecznych prawach gospodarowania w warunkach ograniczonych zasobów i wielkości wymaganych przy realizacji celu. Celem tym jest poznanie rzeczywistości gospodarczej, opisanie jej, wyjaśnienie przyczyn i natury zjawisk oraz procesów zachodzących w gospodarce rynkowej, której podmiotem jest człowiek. Podstawowym narzędziem wykorzystywanym w realizacji tego celu są modele ekonomiczne (ekonometryczne), które stanowią uproszczony obraz rzeczywistości gospodarczej. Jednym z takich modeli jest model Leontiewa. Służy on do badania stanu i struktury złożonych systemów gospodarczych (poprzez system gospodarczy możemy rozumieć zarówno pojedynczą firmę jak i całą gospodarkę jakiegoś kraju). Pozwala również na prognozowanie wartości produkcji całkowitej lub produktu końcowego $n-$gałęziowego systemu w okresach przyszłych.

Występujące w modelach ekonomicznych wielkości wejściowe, wyjściowe, współczynniki, operatory działań itp. mają charakter zmiennych przyjmujących wartości liczbowe albo działań na liczbach. Warunkiem stosowania takich modeli jest kwantyfikowalność występujących w nich elementów i znajomość ich wartości liczbowych. Jednak w naukach ekonomicznych powszechnie stosuje się pojęcia nieostre i nieprecyzyjne jak “wysoki wzrost gospodarczy”, “wysokie bezrobocie”, “niska inflacja”, itp. Mimo nieprecyzyjności takich pojęć, są one w pewnym sensie zrozumiałe jednoznacznie. Jednak chcąc je stosować w modelach ekonomicznych, należy je zastąpić zapisem liczbowym. Jednym ze sposobów matematycznego modelowania pojęć nieostrych jest wykorzystanie zbiorów i liczb rozmytych, w szczególności modelu skierowanych liczb rozmytych.

Celem pracy jest przeanalizowanie możliwości zastosowania modelu skierowanych liczb rozmytych w analizach ekonomicznych na przykładzie modelu Leontiewa.

2 Klasyczny model Leontiewa

Model Leontiewa, znany jest również w literaturze pod nazwami: model przepływów międzygałęziowych, model “*input-output*” czy model nakładów i wyników. Jego twórcą jest amerykański uczony Wassily Leontiew, laureat nagrody Nobla w dziedzinie ekonomii w 1973 roku za *“For the development of the input-output method and for its application to important economic problems”*. Model ten daje możliwość opisywania i analizy złożonych systemów gospodarczych. Opiera się na obserwacji, że w skład gospodarki wchodzi wiele gałęzi produkcyjnych, których działalność jest wzajemnie powiązana. Powiązania te wynikają z faktu, że produkcja jednych gałęzi jest zużywana jako nakład w innych galęziach. Dodatkowo część produkcji zostaje przeznaczona na zaspokojenie potrzeb odbiorców końcowych (sektora gospodarstw domowych czy tworzenie zapasów).

Model Leontiewa umożliwia odpowiedź na pytanie jaka powinna być produkcja każdej gałęzi gospodarki, aby zrównoważyć popyt zgłaszny zarówno przez same gałęzie jak i sektor gospodarstw domowych. Pozwala również na analizę (stąd też często w nazwie zamiast słowa model używa się określenia analiza) zmian w strukturze produkcji, które są wywołane zamianami zapotrzebowania ze strony sektora gospodarstw domowych lub wielkości produkcji jednej z gałęzi. Ponieważ analiza obejmuje zazwyczaj wiele gałęzi i ma dość skomplikowaną strukturę, więc aby uprościć zagadnienie, przyjmujemy pewne założenia:

- poziom produkcji całkowitej (globalnej) każdej gałęzi jest uzależniony od wzajemnych powiązań w całej gospodarce,

[1] Pracę finansowano w ramach pracy statutowej $S/WI/1/07$.

- każda gałąź wytwarza jeden produkt lub grupę produktów w stałych proporcjach i w tym celu zużywa jeden lub grupę produktów również w stałych proporcjach (gdyby któraś z gałęzi wytwarzała dwa różne produkty lub stosowała dwie różne kombinacje czynników produkcji, to można tę gałąź podzielić na dwie osobne gałęzie),
- sektor gospodarstw domowych nie jest uwzględniony jako jedna z gałęzi gospodarki.

Załóżmy, że gospodarka składa się z n gałęzi produkcyjnych (w dalszej części będziemy używać określenia gałęzie, ale mogą to być również sektory czy działy pojedynczej firmy). Wprowadźmy następujące oznaczenia (wyrażone w jednostkach pieniężnych):

– X_i $(i = 1, 2, ..., n)$ wielkość produkcji całkowitej (globalnej) $i-$tej gałęzi,

– x_{ij} $(i, j = 1, 2, ..., n)$ część produkcji $i-$tej gałęzi, która jest zużywana (przepływa) na potrzeby produkcji gałęzi $j-$tej,

– d_i $(i = 1, 2, ..., n)$ produkt końcowy $i-$tej gałęzi (różnica między produkcją całkowitą $i-$tej gałęzi a jej przepływami do wszystkich gałęzi).

Punktem wyjścia modelu Leontiewa jest bilans gospodarczy w postaci tablicy przepływów międzygałęziowych (zob. tabela 1) przygotowany w sposób umożliwiający kwantyfikację wzajemnych powiązań między wyodrębnionymi częściami systemu. Tablica ta zawiera dane liczbowe charakteryzujące działalność gospodarczą w pewnym okresie czasu.

numer gałęzi		przepływy x_{ij}, j = 1	2	$\dots$	n	produkt końcowy d_i	produkcja całkowita X_i
	1	x_{11}	x_{12}	$\dots$	x_{1n}	d_1	X_1
i	2	x_{21}	x_{22}	$\dots$	x_{2n}	d_2	X_2
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	n	x_{n1}	x_{n2}	$\dots$	x_{nn}	d_n	X_n

Tabela 1: Tablica przepływów międzygałęziowych.

Ponieważ produkcja całkowita gałęzi $i-$tej, jest sumą przepływów międzygałęziowych oraz produktu końcowego, otrzymujemy układ równań bilansowych postaci

$$\begin{cases} X_1 = x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n} + d_1 \\ X_2 = x_{21} + x_{22} + ... + x_{2n} + d_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_n = x_{n1} + x_{n2} + ... + x_{nn} + d_n \end{cases} . \tag{1}$$

Na mocy założenia o stałych proporcjach zużywanej produkcji gałęzi $i-$tej przez gałąź $j-$tą możemy określić współczynniki

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \ (i, j = 1, 2, ..., n) \tag{2}$$

nazywane współczynnikami kosztów. Macierz $A = [a_{ij}]$ nazywamy macierzą współczynników kosztów. Współczynniki a_{ij} przyjmują wartości ze zbioru $[0, 1)$ i są interpretowane następująco: aby w $j-$tej gałęzi uzyskać produkcję całkowitą o wartości jednej jednostki pieniężnej, należy zużyć produkcję gałęzi $i-$tej o wartości a_{ij} jednostek pieniężnych. Z zależności (2) otrzymujemy

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot X_j, \ (i, j = 1, 2, ..., n), \tag{3}$$

co pozwala zapisać układ (1) w postaci

$$\begin{cases} X_1 = a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ... + a_{1n}X_n + d_1 \\ X_2 = a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + ... + a_{2n}X_n + d_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_n = a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + ... + a_{nn}X_n + d_n \end{cases} . \tag{4}$$

To z kolei umożliwia zapisanie układu równań bilansowych (4) w postaci macierzowej

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \tag{5}$$

lub w postaci skróconej

$$X = AX + d \tag{6}$$

gdzie X oznacza macierz (wektor) produkcji całkowitej (globalnej), A macierz współczynników kosztów, d macierz (wektor) produktu końcowego.
Równanie (6) zapisujemy w postaci tzw. modelu Leontiewa (I oznacza macierz jednostkową stopnia n)

$$X - AX = d \quad \Longleftrightarrow \quad (I - A)X = d. \tag{7}$$

Macierz $(I - A)$ nosi nazwę macierzy Leontiewa i przekształaca wektor produkcji całkowitej X w wektor produktu końcowego d.

Powstaje natychmiast pytanie czy znając wektor produktu końcowgo d możemy odwrócić sytuację i wyznaczyć wektor produkcji całkowitej X? Aby na nie odpowiedzieć wprowadźmy pojęcie macierzy produktywnej. Macierz A współczynników kosztów jest produktywna, jeżeli istnieje nieujemny wektor produkcji całkowitej X, taki że $X > AX$. Z ekonomicznego punktu widzenia oznacza to, że musi istnieć chociaż jednen wektor produkcji całkowitej, przy którym produkcja całkowita przewyższa zużycie produkcyjne (przepływy międzygałęziowe). Gdyby taki wektor nie istniał, to by oznaczało, że gospodarka nie jest w stanie wytworzyć w każdej gałęzi więcej niż zużywa na potrzeby bieżącej produkcji, czyli byłaby to gospodarka "zjadająca samą siebie". Z tego względu w realnej gospodarce możemy założyć, że macierz A jest produktywna. Zastosujemy teraz dwa następujące twierdzenia.

Twierdzenie 1 *Jeżeli macierz A jest produktywna, to macierz Leontiewa $(I - A)$ jest macierzą nieosobliwą.*

Twierdzenie 2 *Jeżeli macierz A jest produktywna, to wszystkie elementy macierzy $(I - A)^{-1}$ są nieujemne.*

Z twierdzenia 1 wynika bezpośrednio, że w realnej gospodarce produkt końcowy d wyznacza w sposób jednoznaczny produkcję całkowitą X zgodnie z regułą

$$X = (I - A)^{-1}d. \tag{8}$$

Dodatkowo z twierdzenia 2 otrzymujemy, że dla dowolnego nieujmnego wektora produktu końcowego d otrzymamy również nieujemny wektor produkcji całkowitej X.

Model Leontiewa w postaci (7) lub (8) możemy wykorzystać do prognozowania wartości produkcji całkowitej lub produktu końcowego $n-$gałęziowego systemu gospodarczego w okresach przyszłych. Mówiąc bardziej szczegółowo jeżeli na podstawie oceny stanu zdolności produkcyjnych gospodarki określimy wektor produkcji całkowitej X, to z zależności (7) możemy określić wektor produktu końcowego d, jakiego można oczekiwać przy realizacji zakładanego planu produkcyjnego. Z drugiej zaś strony jeżeli na podstawie oceny przyszłego zapotrzebowania na produkt końcowy określimy wektor d, to przy użyciu wzoru (8) określimy produkcję całkowitą X każdej gałęzi, niezbędną do osiągnięcia produktu końcowego zgodnie ze stanem pożądanym. Jak widać ze wzorów (7) i (8), w analizie tej niezbędna jest znajomość postaci macierzy Leontiewa $(I - A)$. W praktyce zakłada się, że jest ona identyczna z macierzą otrzymaną na podstawie bilansu z poprzedniego okresu (założenie to oznacza stabilność relacji cenowych produktów wytwarzanych w gałęziach oraz technik produkcji).

Zauważmy również, że model Leontiewa jest jednorodny i addytywny. Z addytywności otrzymujemy

$$(I - A)(X + \Delta X) = (I - A)X + (I - A)\Delta X = d + \Delta d$$

czyli

$$(I - A)\Delta X = \Delta d \tag{9}$$

oraz

$$(I - A)^{-1}\Delta d = \Delta X. \tag{10}$$

Zależności (9) oraz (10) pozwalają na wyznaczenie przyrostu wektora produktu końowego na podstwie ustalonego przyrostu wektora produkcji całkowitej i odwrotnie, bez uwzględniania pierwotniej wartości produkcji całkowitej i produktu końcowego.

Zastosowania modelu Leontiewa do prognozowania wielkości produkcji całkowitej lub produktu końcowego, oparte jest na założeniu, że wielkości te są mierzalne i możemy jest zapisać za pomocą liczb rzeczywistych. Jednak w rzeczywistej gospodarce niektóre wielkości ekonomiczne są trudno mierzalne. Precyzyjne określenie popytu ze strony sektora gospodarstw domowych na produkcję określonej gałęzi może być wręcz niemożliwe, ponieważ jest on obarczony niepewnością i podlega ciągłym fluktuacjom. Również poziom produkcji całkowitej jest podatny na wszelakie zakłócenia i sygnały płynące z gospodarki, co nastręcza trudności z jednoznaczym opisaniem jego wartości. W tej sytuacji możemy się zwrócić w stronę zbiorów i liczb rozmytych, które umożliwiają matematyczny opis wielkości niepewnych i nieprecyzyjnych.

3 Zbiory rozmyte według Zadeha

Pojęcie zbioru rozmytego wprowadził Lotfi Zadeh w 1965 roku. Zbiorem rozmytym A w pewnej przestrzeni (obszarze rozważań) X, nazywamy zbiór par

$$A = \{(\mu_A(x), x)\}, \quad \forall x \in X,$$

gdzie $\mu_A : X \to [0, 1]$ jest funkcją przynależności zbioru rozmytego A, która każdemu elementowi $x \in X$ przypisuje jego stopień przynależności do zbioru rozmytego A, ($\mu_A(x) \in [0, 1]$).
Wraz z określeniem zbioru rozmytego określa się pewne jego integralne parametry jak nośnik i $\alpha-$przekrój. Nośnikiem zbioru rozmytego A nazywamy zbiór nierozmyty oznaczany jako supp$A$ i określony następująco: supp$A = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}$. Natomiast $\alpha-$przekrojem zbioru rozmytego A, oznaczanym jako A_α, nazywamy następujący zbiór nierozmyty: $A_\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geqslant \alpha\}, \quad \forall_{\alpha\in[0,1]}$.
Liczba rozmyta A to szczególny rodzaj zbioru rozmytego określonego na zbiorze liczb rzeczywistych ($X = \mathbb{R}$), który dodatkowo spełnia następujące warunki:

- jest normalny ($\exists x \in X : \ \mu_A(x) = 1$),
- jest wypukły ($\forall x_1, x_2 \in X, \ \forall \lambda \in [0, 1] : \ \mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geqslant \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2))$),
- jego nośnik jest przedziałem,
- jego funkcja przynależności jest przedziałami ciągła.

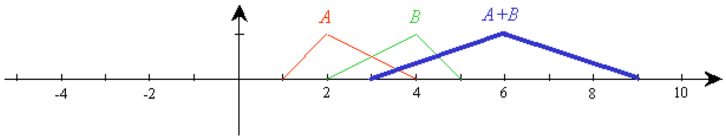
Zbiory rozmyte spełniające powyższe warunki w wielu pracach nazywane są rozmytymi liczbami wypukłymi (lub klasycznymi zbiorami rozmytymi). Nośniki liczb rozmytych stanowią przedziały rzeczywiste supp$A \subset \mathbb{R}$. Z tego względu liczby rozmyte nadają się doskonale do reprezentowania wielkości nieostrych i nieprecyzyjnych (jak dane ekonomiczne) za pomocą przedziałów liczb rzeczywistych otwartych (a, b) (lub domkniętych $[a, b]$), jeżeli tylko mamy pewność, że wielkość reprezentowana jest większa od a i mniejsza od b.

Cztery podstawowe operacje: dodawanie $(+)$, odejmowanie $(-)$, mnożenie $(\cdot)$ i dzielenie $(/)$ otrzymujemy stosując zasadę rozszerzania Zadeha w następującej postaci. Niech A i B będą liczbami rozmytymi z funkcjami przynależności μ_A i μ_B wówczas

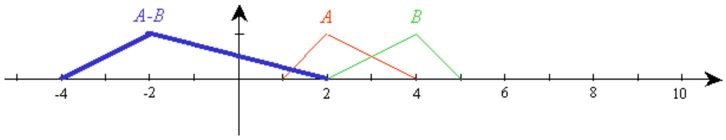
$$\mu_{A*B} = \max_{z=x*y} \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

gdzie $*$ oznacza odpowiednio $+\ ,\ -\ ,\ \cdot\ ,\ /\ ,\quad x, y, z \in \mathbb{R}$ (przy dzieleniu $y \neq 0$).

Tak określone liczby rozmyte i działania na nich (które są dość skomplikowane obliczeniowo), stwarzają jednak pewne ograniczenia. Chodzi tu przede wszystkim o powiększanie nośnika. Niezależnie czy dwie liczby dodajemy (zob. rys. 1) czy też odejmujemy (zob. rys. 2), następuję powiększanie nośnika, co powoduje, że po wykonaniu wielu działań nośnik liczby wynikowej może być tak szeroki, że informacja, którą wynikowa liczba prezentuje staje się mało użyteczna.



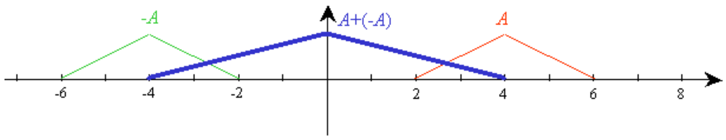
Rysunek 1: Liczby rozmyte A, B oraz wynik dodawania $A + B$.



Rysunek 2: Liczby rozmyte A, B oraz wynik odejmowania $A - B$.

Innym istotnym ograniczeniem, które zauważyli Mizumoto i Tanaka jak fakt, że dla dowolnej liczby rozmytej A nie istnieją liczby rozmyte B i C takie, że $A+B=0$ oraz $A \cdot C = 1$ co oznacza, że $A+(-A) \neq 0$ (zob. rys. 3) oraz $A \cdot A^{-1} \neq 1$, gdzie 0 i 1 oznaczają liczby rzeczywiste z funkcją charakterystyczną postaci

$$\chi_r(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad x = r \\ 0 & \text{gdy} \quad x \neq r \end{cases} .$$



Rysunek 3: Liczba rozmyta A oraz wynik odejmowania $A - A$.

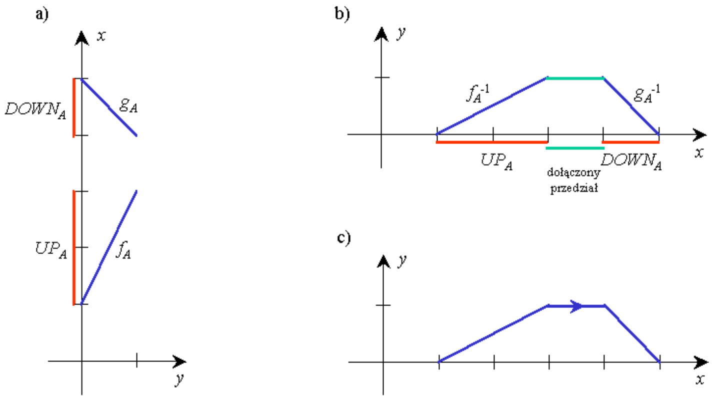
Bezpośrednią, negatywną konsekwencją takiego stanu rzeczy może być brak, w ogólnym przypadku, możliwości rozwiązania prostych równań postaci $X + A = B$ gdyż $X + A + (-A) \neq X$ oraz $X \cdot A = C$ gdyż $X \cdot A \cdot A^{-1} \neq X$. W przypadkach szczególnych rozwiązanie powyższych równań może istnieć, ale nawet wówczas jego znalezienie jest trudne ponieważ pozostaje nam do dyspozycji metoda prób i błędów.

4 Skierowane liczby rozmyte

Wspomnianych powyżej ograniczeń pozbawiony jest nowy model liczb rozmytych - skierowane liczby rozmyte (wprowadzenie skierowanych liczb rozmytych przytoczone za [3]). Skierowaną liczbą rozmytą A nazywamy uporządkowaną parę funkcji $A = (f_A, g_A)$, gdzie obie funkcje są ciągłe oraz $f_A, g_A : [0,1] \to \mathbb{R}$. Odpowiednie części skierowanej liczby rozmytej nazywamy częścią wznoszącą (UP) i częścią opadającą ($DOWN$). Ponieważ obie części są ciągłe, to ich obrazy są ograniczonymi przedziałami odpowiednio UP_A i $DOWN_A$ (zob. rys. 4 a), których granice oznaczamy następująco $UP_A = (l_A, 1_A^-)$ oraz $DOWN_A = (1_A^+, p_A)$. Do tych zbiorów możemy dołączyć na przedziale $[1_A^-, 1_A^+]$ funkcję stałą ($CONST$) równą 1 (warunek normalności). Wówczas $UP_A \cup [1_A^-, 1_A^+] \cup DOWN_A$ tworzy jeden przedział (nośnik liczby A), co pozwala na określenie funkcji przynależności μ_A liczby rozmytej A w następujący sposób (zob. rys. 4 b):

$$\mu_A = \begin{cases} 0 & \text{gdy} & x \notin [l_A, p_A] \\ f_A^{-1}(x) & \text{gdy} & x \in UP_A \\ 1 & \text{gdy} & x \in [1_A^-, 1_A^+] \\ g_A^{-1}(x) & \text{gdy} & x \in DOWN_A \end{cases} .$$

Tak określone liczby rozmyte nawiązują do klasycznych liczb rozmytych, są jednak wyposażone w dodatkową własność zaznaczoną strzałką - skierowanie (zob. rys. 4 c). Graficznie liczba (f_A, g_A) nie różni się od liczby (g_A, f_A), jednak w rzeczywistości są to dwie różne liczby różniące się skierowaniem.



Rysunek 4: a) Przykładowa skierowana liczba rozmyta, b) skierowana liczba rozmyta przedstawiona w sposób nawiązujący do liczb rozmytych w klasycznym podejściu, c) strzałka przedstawiająca porządek odwróconych funkcji i orientację liczby rozmytej [3].

Podstawowe działania na skierowanych liczbach rozmytych określone są następjąco. Niech $A = (f_A, g_A)$, $B = (f_B, g_B)$ i $C = (f_C, g_C)$ będą skierowanymi liczbami rozmytymi wówczas

- C jest sumą liczb A i B ($C = A + B$), jeżeli

$$\forall y \in [0,1] \quad [f_A(y) + f_B(y) = f_C(y) \quad \text{i} \quad g_A(y) + g_B(y) = g_C(y)]$$

- C jest różnicą liczb A i B ($C = A - B$), jeżeli

$$\forall y \in [0,1] \quad [f_A(y) - f_B(y) = f_C(y) \quad \text{i} \quad g_A(y) - g_B(y) = g_C(y)]$$

- C jest iloczynem liczby A przez skalar r ($C = r \cdot A$), jeżeli

$$\forall y \in [0,1] \quad [r \cdot f_A(y) = f_C(y) \quad \text{i} \quad r \cdot g_A(y) = g_C(y)]$$

- C jest iloczynem liczb A i B ($C = A \cdot B$), jeżeli

$$\forall y \in [0,1] \quad [f_A(y) \cdot f_B(y) = f_C(y) \quad \text{i} \quad g_A(y) \cdot g_B(y) = g_C(y)]$$

- C jest ilorazem liczb A i B ($C = A/B$), jeżeli

$$\forall y \in [0,1] \quad [f_B(y) \neq 0 \quad \text{i} \quad g_B(y) \neq 0]$$

  oraz

$$\forall y \in [0,1] \quad [f_A(y)/f_B(y) = f_C(y) \quad \text{i} \quad g_A(y)/g_B(y) = g_C(y)].$$

Tak określone działania są zbliżone do działań na liczbach rzeczywistych, w szczególności dla dowolnej skierowanej liczby rozmytej A mamy

$$A - A = A + (-1) \cdot A = \chi_0 \quad \text{oraz} \quad A \cdot A^{-1} = A \cdot \frac{1}{A} = \chi_1$$

o ile skierowana liczba A jest odwracalna (χ_0 oraz χ_1 oznaczają odpowiednio 0 i 1 rzeczywistą). Pozwala to na rozwiązywanie równań postaci $X + A = B$ oraz $X \cdot A = B$ w skierowanych liczbach rozmytych, w sposób analogiczny do rozwiązywania równań na liczbach rzeczywistych.

5 Model Leontiewa z rozmytym wektorem produkcji całkowitej

Rozważmy pewien fikcyjny system gospodarczy składający się z trzech gałęzi. Tablica 2 jest tablicą przepływów międzygałęziowych tego systemu. Na jego bazie przedstawimy analizę modelu Leontiewa ze względu na wektor produkcji całkowitej X, którego współrzędne będą skierownymi liczbami rozmytymi

numer gałęzi		przepływy x_{ij} j 1	2	3	produkt końcowy d_i	produkcja całkowita X_i
	1	140	320	180	760	1400
i	2	280	640	360	320	1600
	3	420	160	720	500	1800

Tabela 2: Tablica przepływów międzygałęziowych fikcyjnego systemu.

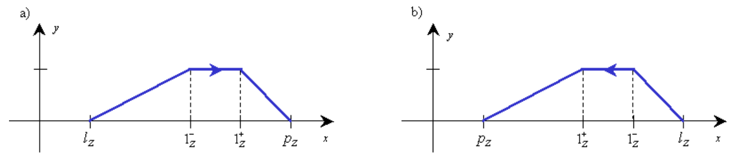
(zakładając stabilność współczynników kosztów a_{ij}). Analiza ma na celu ocenę możliwości oraz przydatność skierowanych liczb rozmytych w modelowaniu ekonomicznym.
Zgodnie z zależnością (2) wyznaczamy macierz A współczynników kosztów w postaci

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Macierz A wykorzystujemy do wyznaczenia macierzy Leontiewa i jej odwrotności

$$(I - A) = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,2 & -0,1 \\ -0,2 & 0,6 & -0,2 \\ -0,3 & -0,1 & 0,6 \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad (I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,36 & 0,52 & 0,40 \\ 0,72 & 2,04 & 0,80 \\ 0,80 & 0,60 & 2,00 \end{pmatrix}.$$

W celu uproszczenia prowadzonej analizy założymy, że obie części UP oraz $DOWN$ rozważanych skierowanych liczb rozmytych będą funkcjami liniowymi. Oznacza to, że rozważamy liczby trapezoidalne (zob. rys. 5).



Rysunek 5: Przykładowa skierowana liczba rozmyta Z: a) dodatnio, b) ujemnie.

Na rysunku 5 zaznaczono również charakterystyczne punkty skierowanej liczby rozmytej Z, które w sposób jednoznaczny ją opisują. Każdą taką liczbę możemy opisać za pomocą czwórki liczb rzeczywistych $\mu_Z(l_Z) = 0$, $\mu_Z(1^-_Z) = 1$, $\mu_Z(1^+_Z) = 1$ i $\mu_Z(p_Z) = 0$, co pozwala zapisać ją w postaci

$$Z = (l_Z \quad 1^-_Z \quad 1^+_Z \quad p_Z). \tag{11}$$

Ponieważ w analizie wykorzystamy tylko dodawanie skierowanych liczb rozmytych, mnożenie przez skalar oraz liczby o skierowaniu przeciwnym wygodniej będzie posługiwać się zapisem tych liczb w postaci (11). Wspomniane działania wyglądają następująco. Niech $Z = (l_Z \quad 1^-_Z \quad 1^+_Z \quad p_Z)$ i $S = (l_S \quad 1^-_S \quad 1^+_S \quad p_S)$ będą skierownymi liczbami rozmytymi oraz niech $\alpha \in \mathbb{R}$. Wówczas

- $Z + S = (l_Z + l_S \quad 1^-_Z + 1^-_S \quad 1^+_Z + 1^+_S \quad p_Z + p_S)$,
- $\alpha \cdot Z = (\alpha \cdot l_Z \quad \alpha \cdot 1^-_Z \quad \alpha \cdot 1^+_Z \quad \alpha \cdot p_Z)$,
- liczba przeciwnie skierowana do liczby Z, oznaczona przez $Z^\perp$ (zob. rys. 5), ma postać $Z^\perp = (p_Z \quad 1^+_Z \quad 1^-_Z \quad l_Z)$.

5.1 Ekonomiczna interpretacja rozmytych współrzędnych wektora produkcji całkowitej

Współrzędne X_i, $(i = 1, 2, 3)$ wektora produkcji całkowitej X będziemy reprezentować za pomocą skierowanych liczb rozmytych. Każda z nich będzie wypadkową ocen grupy ekspertów (lub oceną pojedynczego eksperta) przeprowadzających analizę możliwości produkcyjnych danej gałęzi na nadchodzący okres. Analizy ekspertów uwzględniają trzy czynniki: ocenę prespektyw przed gałęzią w nadchodzącym okresie, możliwości dokonania zmian w poziomie produkcji całkowitej oraz jaki to pociągnie za sobą skutek finansowy dla gałezi (mierzony np. za pomocą zysku). Elementy te znajdują odwierciedlenie w skierowanej liczbe rozmytej w następujący sposób: skierowanie określa koniunkturę w gałęzi, nośnik opisuje możliwe do osiągniecia poziomy produkcji nie pogarszające kondycji finansowej gałezi, natomiast wartości funkcji przynależności ilustrują zmianę kondycji finansowej gałęzi.

5.1.1 Liczby rozmyte o skierowaniu dodatnim

Liczby o skierowaniu pokazanym na rysunku 5a, umownie nazwiemy je o skierowaniu dodatnim, będą opisywały poziom produkcji całkowitej w gałezi, która zdaniem ekspertów ma przed sobą dobre perspektywy w nadchodzącym okresie (co odzwierciedla skierowanie). Zwyżkująca koniunktura na produkcję tej gałęzi sprawia, że powinna ona zwiększyć poziom produkcji całkowitej, poprawiając wynik finansowy, którego miernikiem będzie funkcja przynależności.

Załóżmy, że punkt l_Z określa poziom produkcji całkowitej w danej gałezi w okresie poprzedzającym badanie. Wówczas wartość funkcji przynależności $\mu_Z(l_Z) = 0$ stanowi wartość odniesienia, w stosunku do której eksperci odnoszą wynik finansowy uzyskany przy wyższych poziomach produkcji. Wartości te będziemy intepretować jako stosunek liczby k ekspertów spośród m, którzy są zdania, że dany poziom produkcji całkowitej poprawia bieżący wynik. Ponieważ eksperci stosują różnorodne techniki analizy, możemy oczekiwać, że większa ich zgodność oznacza bardziej znaczącą (zauważalną) poprawę wyniku finansowego gałęzi. Wówczas na wartości funkcji przynależności możemy patrzeć jak na stopień poprawy tego wyniku. Na przykład możemy przyjąć, że $\mu_{X_i}(x) = 0,1$ oznacza, iż produkcja całkowita na poziomie x zapewnia 1% poprawę wyniku finansowego gałęzi. Poszczególnym elementom skierowanej dodatnio liczby rozmytej możemy nadać następującą interpretację ekonomiczną:

- punkt l_Z - wyjściowy poziom produkcji, który może być utrzymany bez zmiany wyniku finansowego gałęzi. Jednak dobra koniunktura sprawia, że wszyscy eksperci są zgodni ($\mu_Z(l_Z) = 0$), iż powinien być zwiększony, poprawiając ten wynik.

- część UP - część ta odzwierciedla sytuację, że rosnący poziom produkcji całkowitej zapewnia gałęzi coraz lepszy wynik finansowy (w stosunktu do poziomu odniesienia $\mu_Z(l_Z)$). Jest to widoczne w rosnących wartościach funkcji przynależności, które odzwierciedlają rosnącą liczbę ekspertów przekonaną o korzyściach płynących dla gałęzi ze wzrostu produkcji. Stanowisko ekspertów może wynikać z faktu, że gałąź dysponowała niewykorzystanymi środkami produkcji w postaci maszyn, urządzeń czy też całych linii produkcyjnych, których uruchomienie nie pociągą za sobą znacznych kosztów. Wówczas przychód uzyskany ze zbytu dodatkowej produkcji (ponad poziom l_Z) przewyższy poniesione dodatkowe koszty związane z uruchomieniem dodatkowych mocy produkcyjnych.

- część $CONST$ - poziom produkcji, który umownie nazwiemy optymalnym (najbardziej oczekiwany co obrazuje zgodność wszystkich ekspertów ($\mu_Z(x) = 1$)). Są oni przekonani, że w danej sytuacji gospodarczej poziom taki zapewnia najlepszy wynik finansowy. Stabilizacja funkcji przynależności (obrazowana jako wartość stała równa 1) oznacza, że koszty (zakupu dodatkowych maszyn i urządzeń) umożliwiające dalsze zwiększanie poziomu produkcji zaczynają równoważyć się z przychodem uzyskanym ze sprzedaży dodatkowej produkcji, co hamuje poprawę wyniku finansowego.

- część $DOWN$ - ta część odzwierciedla opinie ekspertów, że dalsze zwiększanie poziomu produkcji zacznie osłabiać wynik finansowy (w stosunku do uzyskanego przy poziomie produkcji z części $CONST$). Może to wynikać z faktu, że uważają oni iż uzyskanie takiego poziomu produkcji pociągnie za sobą znaczny wzrost kosztów (zakup nowych maszyn i urządzeń, nowych linii produkcyjnych), który w coraz większym stopniu będzie pochłaniać wyższy przychód uzyskany ze sprzedaży dodatkowej produkcji. Ponadto mogą się na to nałożyć kłopoty ze zbytem produkcji, co z jednej strony ograniczy przychód, zaś z drugiej podniesie koszty związane z magazynowaniem niewykorzystanej produkcji.

- punkt p_Z - jest to maksymalny poziom produkcji jaki może być osiągnięty, bez pogarszania kondycji finansowej gałęzi. Dalsze zwięszanie produkcji pociąga za sobą znaczne koszty (budowa nowych zakładów, fabryk), których nie da się zbilansować wyższym przychodem. Dodatkowo mogą się nasilić trudności ze zbytem tak wysokiego poziomu produkcji.

5.1.2 Liczby rozmyte o skierowaniu ujemnym

Liczb o skierowaniu pokazanym na rysunku 5b, nazwiemy je umownie o skierowaniu ujemnym, użyjemy do charakteryzacji poziomu produkcji w gałęzi, która, zdaniem ekspertów, ma przed sobą pogarszającą się perspektywę. Słabnący popyt na produkcję tej gałęzi sprawia, że powinna ona zmniejszyć poziom produkcji całkowitej, który może poprawić wynik finansowy lub złgodzić skutki złej koniunktury.

Również tutaj założymy, że punkt l_Z określa poziom produkcji w danej gałezi w okresie poprzedzającym badanie. Aby zapewnić analogiczną interpretację funkcji przynależności liczby skierowanej ujemnie (z funkcją przynależności liczby skierowanej dodatnio) przyjmiemy, że wartość $\mu_Z(l_Z) = 0$ określa oczekiwany wynik finansowy gałezi (gdy jest ujemny, to określa straty), który gałąź by osiągnęła, gdyby nie nastąpiły zmiany w poziomie produkcji przy słabnącej koniunkturze. Jednocześnie wartość ta stanowi poziom odniesienia do wyniku finansowego uzyskanego przy niższych poziomach produkcji. Poszczególne elementy skierowanej ujemnie liczby rozmytej możemy interpretować następująco:

- punkt l_Z - wyjściowy poziom produkcji. Eksperci są zgodni ($\mu_Z(l_Z) = 0$), że przy złej koniunkturze, niższe przychody oraz rosnące koszty związane z magazynowaniem niewykorzystanej produkcji pogarszają wynik finansowy i zmuszą gałąź do obniżenia poziomu produkcji.

- część UP - obniżanie poziomu produkcji będzie łagodzić skutki złej koniunktury i poprawiać kondycję gałęzi. Wynika to faktu, że mimo iż niższa produkcja zapewnia mniejszy przychód, to jednak spadek kosztów związanych z zakupem surowców do produkcji oraz kosztów magazynowania ewentualnego nadmiaru produkcji zapewnia poprawę wyniku finansowego.

- część $CONST$ - poziom produkcji, który nazwiemy optymalnym z punktu widzenia ekspertów w aktualnej sytuacji gospodarczej, zapewnia zbyt całej produkcji. Dodatkowo malejące koszty zaczynają równoważyć malejące przychody, co sprawia stabilizację wyniku finansowego (wartość funkcji przynależności jest stała i równa 1).

- część $DOWN$ - ta część odzwierciedla przekonanie ekspertów, że dalsze obniżanie poziomu produkcji może doprowadzić do pogorszenia kondycji finansowej gałęzi (w stosunku do wyniku uzyskanego przy poziomie produkcji z części $CONST$). Malejąca produkcja zapewnia niższy przychód, który w coraz większym stopniu jest pochłaniany przez koszty związane z funkcjonowaniem gałęzi (np. koszty stałe), jednak nadal zepewnia nieznaczny dodatni wynik finansowy.

- punkt p_Z - jest to minimalny poziom produkcji, który zapewnia gałęzi funkcjonowanie. Dalsze obniżanie produkcji grozi bankructwem i wyjściem z rynku.

5.2 Analiza modelu Leontiewa z rozmytym wektorem produkcji całkowitej

W tej części rozważymy analizę możliwego do uzyskania produktu końcowego, przy użyciu modelu Leontiewa, w zależności od przewidywanego przez ekspertów wektora produkcji całkowitej, którego współrzędne będą skierowanymi liczbami rozmytymi. Analiza będzie ukierunkowana na rozmiary możliwego do uzyskania produktu końcowego, tendencji w nadchodzącym okresie w kształtowaniu się tego produktu w zależności od zadanego wektora produkcji całkowitej oraz możliwości uzyskania dodatkowych informacji (korzyści) jakie daje stosowanie skierowanych liczb rozmytych.

Lp.	X	d	$\lvert\mathrm{supp}X\rvert$	$\lvert\mathrm{supp}d\rvert$
1	$\begin{pmatrix} (1400\ 1410\ 1420\ 1430) \\ \chi_{1600} \\ \chi_{1800} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (760\ 769\ 778\ 787) \\ (320\ 318\ 316\ 314) \\ (500\ 497\ 494\ 491) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +27 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} (1400\ 1420\ 1440\ 1460) \\ \chi_{1600} \\ \chi_{1800} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (760\ 778\ 796\ 814) \\ (320\ 316\ 312\ 308) \\ (500\ 494\ 488\ 482) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +54 \\ -12 \\ -18 \end{pmatrix}$

Tabela 3: Efekt dodatniego rozmycia współrzędnej X_1 wektora produkcji całkowietej i jego wpływ na produkt końcowy.

W wierszu 1 tabeli 3 widzimy efekt dodatniego rozmycia współrzędnej X_1 i jego wpływ na produkt końcowy. Opis wektora X oznacza, że eksperci oceniają, iż pierwsza gałąź ma przed sobą dobre perspektywy, a jej produkcja powinna się kształtować w zakresie $(1400, 1430)$, aby gałąź wykorzystała koniunkturę i poprawiła wynik finansowy. Dodatkowo, aby osiągnąć optymalny (najlepszy) wynik, produkcja powinna oscylować w przedziale $(1410, 1420)$. Ponadto eksperci ocenili, że w dwóch pozostałych gałęziach nie ma istotnych przesłanek, które mogłby wpłynąć na poziom produkcji, w wyniku czego uznają oni, iż dotychczasowy poziom produkcji, odpowiednio 1600 i 1800, powinien zostać zachowany.

Jakie wnioski dotyczące możliwego do uzyskania, na bazie prognozowanego przez ekspertów wektora X, produktu końcowego możemy wyciągnąć? Widzimy, że produkt końcowy pierwszej gałęzi będzie miał tendencje do wzrostu i oscylował w zakresie $(760, 787)$. Produkty w dwóch pozostałych gałęziach będą się obniżać i kształtować w przedziałach odpowiednio $(314, 320)$ i $(491, 500)$. Dodatkowo jeżeli gałąź pierwsza ustawi poziom produkcji na poziomie optymalnym ($CONST$), wówczas produkt końcowy będzie się kształtował w poszczególnych gałęziach odpowiednio w zakresach $(769, 778)$, $(316, 318)$ i $(494, 497)$.

Możemy również analizować części UP i $DOWN$ współrzędnych wektora produkcji. Ustalenie produkcji na poziomie z części UP, czyli w zakresie $(1400, 1410)$, oznacza, że gałąź chce skorzystać z dobrej koniunktury, ale jednocześnie eksperci przewidują, że koniunktura w dalszej przyszłości może nie być już tak dobra, co zniechęca do większych inwestycji i rozszerzania produkcji. Wówczas produkt końcowy będzie się kształtował w zakresie odpowienio $(760, 769)$, $(318, 320)$ i $(497, 500)$. Z kolei część $DOWN$ odzwieciedla, że perspektywy długofalowe są dobre i znaczące zwiększenie poziomu produkcji, mimo nie uzyskania optymalnego wyniku finansowego w nadchodzącym okresie, zapewni w dłuższej perspektywie dobry wynik.

Jeżeli określimy szerokość nośnika liczby rozmytej Z jako

$$|\mathrm{supp}Z| = (\max\{l_Z, 1_Z^-, 1_Z^+, p_Z\} - \min\{l_Z, 1_Z^-, 1_Z^+, p_Z\})$$

pozwoli to na określenie maksymalnych zmian, jakich można oczekiwać w produkcie końcowym, gdyby gałęzie dokonały w poziomie produkcji maksymalnych zmian zapewniających niepogarszanie wyniku finansowego. Widzimy, że w gałęzi pierwszej produkcja może maksymalnie wzrosnąć o 30 (w dwóch pozostałych pozostaje bez zmian). Spowodowałoby to wzrost produktu w gałęzi pierwszej o 27, a w dwóch pozostałych spadek odpowiednio o 6 i 9. Zmiany te wynikają z faktu, że przy stałej produkcji w gałęzi drugiej i trzeciej, wzrost produkcji w gałęzi pierwszej powoduje większe zapotrzebowanie ze strony tej gałęzi na produkcję pozostałych, co odbija się w ich malejącym produkcie końcowym. Dodatkowo większe zmiany w gałęzi trzeciej odzwierciedlają wyższy udział tej gałęzi w produkcji gałęzi pierwszej co jest widoczne w przepływach międzygałęziowych $x_{31} = 420$ w stosunku do $x_{21} = 280$ (zob. tabela 2).

Możemy również dokanać analizy funkcji przynależności, przez pryzmat $\alpha-$przekrojów. Jeżeli każda z gałęzi chce ustawić produkcję na poziomie, który zapewni jej co najmniej 50% poprawę wyniku finansowego, z możliwego do uzyskania (1 stanowi 100%), to posłużymy się przekrojami $\alpha = 0.5$. Poziom produkcji będzie wówczas następujący

$$X_{0.5} = \begin{pmatrix} (1405, 1425) \\ 1600 \\ 1800 \end{pmatrix}$$

co daje produkt końcowy

$$d_{0.5} = \begin{pmatrix} (764.5, 782, 5) \\ (315, 319) \\ (492.5, 498.5) \end{pmatrix}.$$

Drugi wiersz tabeli 3 obrazuje efekty wywołane w produkcie końcowym, gdy eksperci ocenili, że możliwe są znacznie większe zmiany w poziomie produkcji. Uzyskane wyniki pokazują nasilenie wszystkich zaoberwowanych rezultatów. Otrzymujemy większe rozmycie przedziałów produktu końcowego i większe możliwe do uzyskania zamiany maksymalne.

Lp.	X	d	$\|\mathrm{supp}X\|$	$\|\mathrm{supp}d\|$
1	$\begin{pmatrix} (1400\ \ 1390\ \ 1380\ \ 1370) \\ \chi_{1600} \\ \chi_{1800} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (760\ \ 751\ \ 742\ \ 733) \\ (320\ \ 322\ \ 324\ \ 326) \\ (500\ \ 503\ \ 506\ \ 509) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -27 \\ +6 \\ +9 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} (1400\ \ 1380\ \ 1360\ \ 1340) \\ \chi_{1600} \\ \chi_{1800} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (760\ \ 742\ \ 724\ \ 706) \\ (320\ \ 324\ \ 328\ \ 332) \\ (500\ \ 506\ \ 512\ \ 518) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -60 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -54 \\ +12 \\ +18 \end{pmatrix}$

Tabela 4: Efekt ujemnego rozmycia współrzędnej X_1 wektora produkcji całkowietej i jego wpływ na produkt końcowy.

Analogicznie wygląda interpretacja uzyskanych wyników, gdy rozmyjemy gałąź drugą lub trzecią. Tabela 4 przedstawia sytuację odmienną do sytuacji z tabeli 3. Eksperci ocenili, że pierwsza gałąź ma przed sobą słabnącą koniunkturę. Znajduje to odzwierciedlenie w odwróceniu wszystkich tendencji w porównaniu z tabelą 3. Ponieważ produkcja pierwszej gałęzi będzie maleć, to z jednej strony obniży się produkt końcowy tej gałęzi, natomiast z drugiej osłabnie zapotrzebowanie na produkcję pozostałych gałęzi. To z kolei, przy niezmienionej produkcji gałęzi drugiej i trzeciej, sprawi że ta niewykorzystana produkcja zostanie przesunięta do produktu końcowego, czego skutkiem będzie wzrost d_2 i d_3.

Rozważmy teraz rozmycie produkcji całkowitej wszystkich gałęzi, co obrazuje tabela 5. Wprowadzono w niej dodatkową kolumnę $X(D,U)$, która pokazuje skierowanie poszczególnych współrzędnych wektora X, gdzie D oznacza skierowanie dodatnie, a U ujemne.

Lp.	skierowanie	X	d	$\lvert \mathrm{supp} X \rvert$	$\lvert \mathrm{supp} d \rvert$
1	$X(DDD)$	$\begin{pmatrix} (1400\ 1410\ 1420\ 1430) \\ (1600\ 1610\ 1620\ 1630) \\ (1800\ 1810\ 1820\ 1830) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (760\ 766\ 772\ 778) \\ (320\ 322\ 324\ 326) \\ (500\ 502\ 504\ 506) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +30 \\ +30 \\ +30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +18 \\ +6 \\ +6 \end{pmatrix}$
2	$X(UDD)$	$\begin{pmatrix} (1400\ 1390\ 1380\ 1370) \\ (1600\ 1610\ 1620\ 1630) \\ (1800\ 1810\ 1820\ 1830) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (760\ 748\ 736\ 724) \\ (320\ 326\ 332\ 338) \\ (500\ 508\ 516\ 524) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -30 \\ +30 \\ +30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -36 \\ +18 \\ +24 \end{pmatrix}$
3	$X(DUD)$	$\begin{pmatrix} (1400\ 1410\ 1420\ 1430) \\ (1600\ 1590\ 1580\ 1570) \\ (1800\ 1810\ 1820\ 1830) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (760\ 770\ 780\ 790) \\ (320\ 310\ 300\ 290) \\ (500\ 504\ 508\ 512) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +30 \\ -30 \\ +30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +30 \\ -30 \\ +12 \end{pmatrix}$
4	$X(DDU)$	$\begin{pmatrix} (1400\ 1410\ 1420\ 1430) \\ (1600\ 1610\ 1620\ 1630) \\ (1800\ 1790\ 1780\ 1770) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (760\ 768\ 776\ 784) \\ (320\ 326\ 332\ 238) \\ (500\ 590\ 580\ 470) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +30 \\ +30 \\ -30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +24 \\ +18 \\ -30 \end{pmatrix}$
5	$X(UUD)$	$\begin{pmatrix} (1400\ 1390\ 1380\ 1370) \\ (1600\ 1590\ 1580\ 1570) \\ (1800\ 1810\ 1820\ 1830) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (760\ 752\ 744\ 736) \\ (320\ 314\ 308\ 302) \\ (500\ 510\ 520\ 430) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -30 \\ -30 \\ +30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -24 \\ -18 \\ +30 \end{pmatrix}$
6	$X(UDU)$	$\begin{pmatrix} (1400\ 1390\ 1380\ 1370) \\ (1600\ 1610\ 1620\ 1630) \\ (1800\ 1790\ 1780\ 1770) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (760\ 750\ 740\ 730) \\ (320\ 330\ 340\ 350) \\ (500\ 496\ 492\ 488) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -30 \\ +30 \\ -30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -30 \\ +30 \\ -12 \end{pmatrix}$
7	$X(DUU)$	$\begin{pmatrix} (1400\ 1410\ 1420\ 1430) \\ (1600\ 1590\ 1580\ 1570) \\ (1800\ 1790\ 1780\ 1770) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (760\ 772\ 784\ 796) \\ (320\ 314\ 308\ 302) \\ (500\ 492\ 484\ 476) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +30 \\ -30 \\ -30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} +36 \\ -18 \\ -24 \end{pmatrix}$
8	$X(UUU)$	$\begin{pmatrix} (1400\ 1390\ 1380\ 1370) \\ (1600\ 1590\ 1580\ 1570) \\ (1800\ 1790\ 1780\ 1770) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (760\ 754\ 748\ 742) \\ (320\ 318\ 316\ 314) \\ (500\ 498\ 496\ 494) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -30 \\ -30 \\ -30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -18 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$

Tabela 5: Efekt rozmycia współrzędnych wektora produkcji całkowietej i jego wpływ na produkt końcowy.

Rozważmy wiersz 1 tabeli 5. Eksperci oceniają, że dobra koniunktura w gospodarce daje możliwość zwiększenia poziomu produkcji w każdej gałęzi i poprawę wyników finansowych. Prognozują oni, że poziom produkcji można opisać wektorem

$$X = \begin{pmatrix} (1400\ 1410\ 1420\ 1430) \\ (1600\ 1610\ 1620\ 1630) \\ (1800\ 1810\ 1820\ 1830) \end{pmatrix}$$

co pozwoli na wzrost produktu końcowego w każdej gałęzi i uzyskanie poziomów

$$d = \begin{pmatrix} (760\ 766\ 772\ 778) \\ (320\ 322\ 324\ 326) \\ (500\ 502\ 504\ 506) \end{pmatrix}.$$

Dodatkowo gdyby każda gałąź chciała osiągnąć maksymalny poziom poprawy wyniku finansowego to produkcja kształtował by się na poziomie

$$X_1 = \begin{pmatrix} (1410, 1420) \\ (1610, 1620) \\ (1810, 1820) \end{pmatrix}$$

i dałaby produkt końcowy w zakresie

$$d_1 = \begin{pmatrix} (766, 772) \\ (322, 324) \\ (502, 504) \end{pmatrix}.$$

Z kolei gdyby każda gałąź zadowoliła się co najmniej 50% poprawą wyniku finansowego, to produkt końcowy będzie oscylował w zakresach

$$d_{0.5} = \begin{pmatrix} (763, 775) \\ (321, 325) \\ (501, 505) \end{pmatrix}.$$

Natomiast maksymalny możliwy do osiągnięcia, bez pogarszania wyniku finansowego, wzrost poziomu produkcji całkowitej w każdej gałęzi o 30, spowodowałby wzrost produktu końcowego każdej gałęzi odpowiednio o 18, 6 i 6. Pozostałe wiersze tabeli 5 (od 2 do 8) pokazują analizy możliwego do uzyskania produktu końcowego, gdy produkcja każdej gałęzi jest rozmyta i uwzględnia różne perspektywy jakie eksperci prognozują (odzwierciedlone w skierowaniu).

6 Podsumowanie

Celem pracy była analiza możliwości wykorzystania i przydatności skierowanych liczb rozmytych w badaniach ekonomicznych. Symulacje pokazują, że mogą być one z powodzeniem stosowane w modelach ekonomicznych, dając wyniki zgodne z intuicją i wiedzą ekonomiczną. Prostota wykonywanych na nich działań i ilość informacji jakie mogą przenosić stanowią niewątpliwie ich zalety. Pozwlają na modelowanie zjawisk i wielkości, których nie daje się zmierzyć i opisać z pomocą liczb rzeczywistych, a z taką sytuacją mamy najczęściej w modelowaniu ekonomicznym, gdzie wielkości wejściowe są obarczone niepewnością, wrażliwe na czynniki i zaburzenia zewnętrzne. Dodatkowo umożliwjają nie tylko śledzenie skutków, ale również tendencji w zależnościach systemu. Pozwalają również na jednoczesną analizę różnych aspektów ekonomicznych, co przy użyciu liczb rzeczywistych wymagałoby przeprowadzenia kilku analiz i rachunków, a może także dołączenie do modelu dodatkowych równań, co zwiększa jego złożoność.

W pracy założono, że funkcje UP i $DOWN$ są liniowe, co ułatwia badanie i wyciąganie wniosków, szczególnie w przypadku $\alpha-$przekrojów. Aby urealnić analizę, funkcje te możemy zastąpić dowolnymi funkcjami, które wierniej będą odzwierciedlały zależności między poziomem produkcji a wynikiem finansowym gałęzi. Dodatkowo jedna lub dwie części skierowanej liczby rozmytej (UP, $CONST$, $DOWN$) mogą, w zależności od potrzeb, zostać zredukowane do punktu.

Literatura

1. Czerwiński Z., Matematyka na usługach ekonomii, PWN, Warszawa 1980.
2. Kacprzyk J., Zbiory rozmyte w analizie systemowej, PWN, Warszawa, 1986.
3. Kosiński W., On Soft Computing and Modeling, Image Processing and Communication, vol.11, no.1, pp.71-82 .
4. Kosiński W., On Fuzzy Number Calculus, Int. J. Appl. Comput. Sci., 2006, vol.16, no.1, pp.51-57.
5. Kosiński W., Prokopowicz P., Algebra liczb rozmytych, Matematyka stosowana 5, 2004.
6. Prokopowicz P., Algorytmizacja działań na liczbach rozmytych i jej zastosowanie, Rozprawa doktorska, Warszawa, 2005.