



# Szeregowanie zadań w oparciu o modele regresji rangowej

---

Leon Bobrowski <sup>1,2</sup>

Tomasz Łukaszuk <sup>1</sup>

<sup>1</sup>Politechnika Białostocka, Wydział Informatyki

<sup>2</sup>Instytut Biocybernetyki i Inżynierii Biomedycznej PAN



# Plan wystąpienia

---

- Wprowadzenie
- Liniowa transformacja rangowa
- Dodatnio i ujemnie zorientowane dipole
- Zbiory  $C+$  i  $C-$  i ich liniowa separowalność
- Funkcja kryterialna CPL
- Minimalizacja wartości funkcji kryterialnej CPL
- Zastosowanie liniowej transformacji rangowej w szeregowaniu zadań
- Przykłady zastosowań



# Wprowadzenie (1/5)

---

- Realizowany proces obliczeniowy został podzielony na  $m$  zadań  $O_j$
- Każde zadanie jest scharakteryzowane przez przedział czasu  $\tau_j$  wymagany na jego realizację oraz wektor zależności  $\rho_j = [\rho_{j1}, \dots, \rho_{jm}]^T$  o składowych binarnych wyrażający zależność od innych zadań
- Zakładamy, że zadania nie mogą się blokować wzajemnie



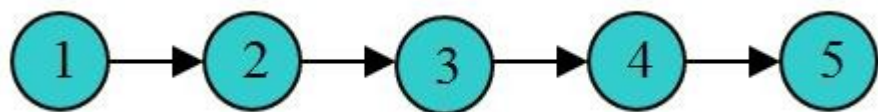
# Wprowadzenie (2/5)

---

- $\rho_{ji}=1$  - oznacza, że zadanie  $O_j$  może być realizowane tylko wtedy, gdy zostanie zrealizowane zadanie  $O_i$
- $\rho_{ji}=0$  – oznacza, że zadanie  $O_j$  może być realizowane niezależnie od zadania  $O_i$

# Wprowadzenie (3/5)

- Przykład 1: Zadania realizowane sekwencyjnie



$$\rho_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\rho_2 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

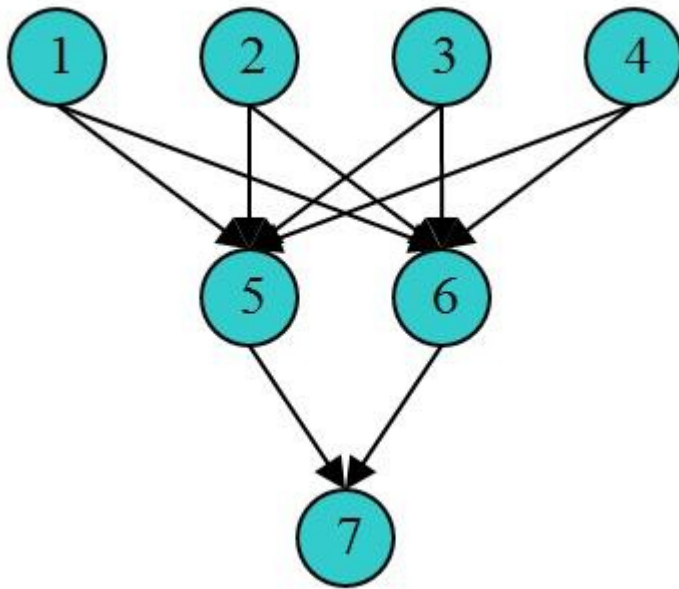
$$\rho_3 = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\rho_4 = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

$$\rho_5 = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$$

# Wprowadzenie (4/5)

- Przykład 1: Perceptron wielowarstwowy



$$\rho_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\rho_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\rho_3 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\rho_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\rho_5 = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\rho_6 = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\rho_7 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0]$$



# Wprowadzenie (5/5)

---

- Sformułowanie problemu:
  - Weryfikacja zagrożenia blokowania się zadań
  - Optymalizacja procesu obliczeniowego poprzez wykrycie zadań możliwych do zrównoleglenia
  - Wyznaczenie kolejności wykonywania się zadań

# Liniowa transformacja rangowa (1/3)

- Rozważamy odwzorowanie liniowe postaci

$$y_j = w^T x_j \quad j = 1, \dots, m$$

gdzie  $w = [w_1, \dots, w_N]^T \in R^N$  jest wektorem parametrów

- Odwzorowanie przyporządkowuje poszczególnym wektorom cech  $x_j$  punkty na prostej  $y_j$
- Punkty  $y_j$  na prostej uporządkowane są zgodnie z relacją większościową

$$y_{j(1)} < y_{j(2)} < \dots < y_{j(m)}$$



# Liniowa transformacja rangowa (2/3)

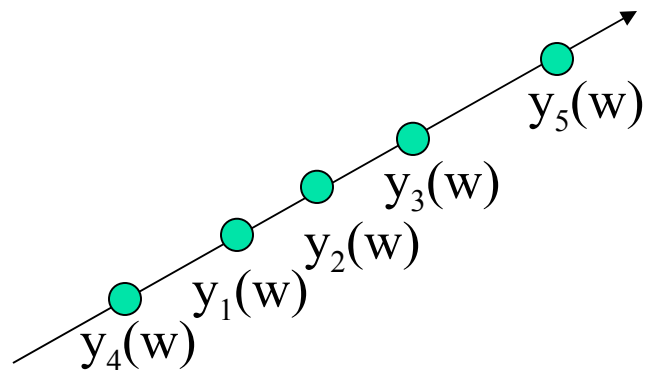
$$x_4 \prec x_1$$

$$x_1 \prec x_3$$

$$x_3 \prec x_2$$

$$x_2 \prec x_5$$

$$y_j(w) = w^T x_j$$



Relacja  
następstwa

Transformacja  
liniowa

Uporządkowanie  
punktów na prostej

# Liniowa transformacja rangowa (3/3)

- Zagadnienie regresji rangowej:

Wybór wektora parametrów  $\mathbf{w}$ , który daje największą możliwą zgodność uporządkowania punktów  $\mathbf{y}_j$  na prostej wyznaczonej przez równanie  $y_j(w) = w^T x_j$  z relacją następstwa  $\prec$  pomiędzy wektorami cech  $\mathbf{x}_j$ .



# Dodatnio i ujemnie zorientowane dipole (1/3)

---

- Relacja następstwa  $\prec$  może być użyta w określaniu orientacji dipoli utworzonych z wektorów cech, dla których relacja jest dana

# Dodatnio i ujemnie zorientowane dipole (2/3)

- **Def. 1:** Para wektorów  $(x_j, x_k)$  ( $j < k$ ) tworzy dipol z orientacją dodatnią  $\{x_j, x_k\}$   $(j, k) \in I^+$  wtedy i tylko wtedy gdy  $x_j \prec x_k$   
 $(\forall (j, k) \in I^+) \quad x_j \prec x_k$
- **Def. 2:** Para wektorów  $(x_j, x_k)$  ( $j < k$ ) tworzy dipol z orientacją ujemną  $\{x_j, x_k\}$   $(j, k) \in I^-$  wtedy i tylko wtedy gdy  $x_k \prec x_j$   
 $(\forall (j, k) \in I^-) \quad x_k \prec x_j$

# Dodatnio i ujemnie zorientowane dipole (3/3)

- **Def. 3:** Uporządkowanie punktów  $y_j$  na prostej jest zgodne z relacją  $\prec$  pomiędzy wektorami  $x_j$  wtedy i tylko wtedy gdy spełnione są relacje:

$$(\forall (j, k) \in I^+) \quad y_j < y_k$$

$$(\forall (j, k) \in I^-) \quad y_j > y_k$$

# Zbiory $C^+$ i $C^-$ i ich liniowa separowalność (1/3)

- Relacje  $(\forall (j, k) \in I^+) \quad y_j < y_k$   
 $(\forall (j, k) \in I^-) \quad y_j > y_k$

można przedstawić w postaci:

$$(\forall (j, k) \in I^+) \quad w^T (x_k - x_j) > 0$$

$$(\forall (j, k) \in I^-) \quad w^T (x_k - x_j) < 0$$

# Zbiory $C^+$ i $C^-$ i ich liniowa separowalność (2/3)

- Tworzymy zbiory wektorów  $C^+$  i  $C^-$

$$C^+ = \{r_{jk} = (x_k - x_j) : (j, k) \in I^+\}$$

$$C^- = \{r_{jk} = (x_k - x_j) : (j, k) \in I^-\}$$

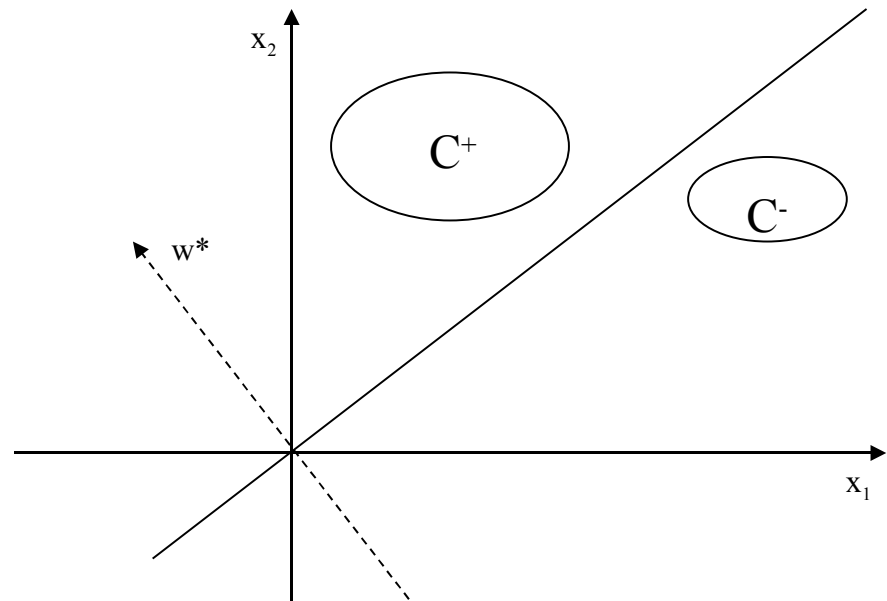
- Liniowa rozdzielność zbiorów  $C^+$  i  $C^-$  przez hiperpłaszczyznę  $H(w) = \{x : w^T x = 0\}$  przechodzącą przez początek układu współrzędnych zapewnia spełnienie relacji

$$(\forall (j, k) \in I^+) \quad y_j < y_k$$

$$(\forall (j, k) \in I^-) \quad y_j > y_k$$

# Zbiory $C^+$ i $C^-$ i ich liniowa separowalność (3/3)

- Zagadnienie regresji rangowej sprowadza się do wyznaczenia optymalnej hiperpłaszczyzny rozdzielającej zbiory  $C^+$  i  $C^-$





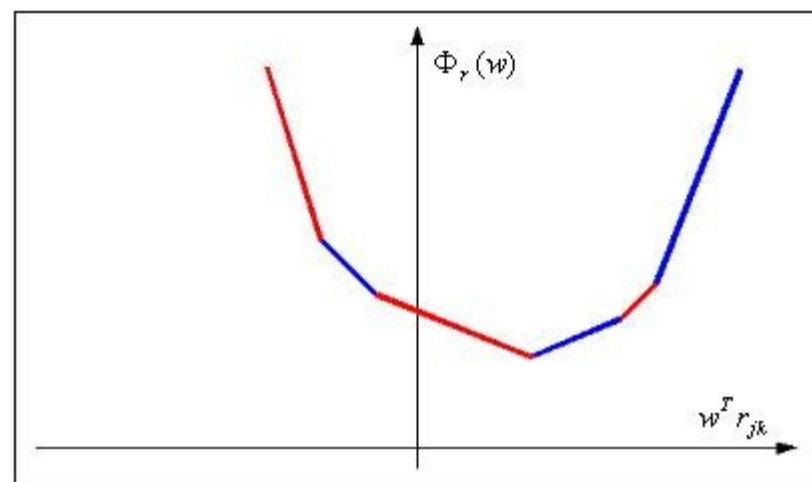
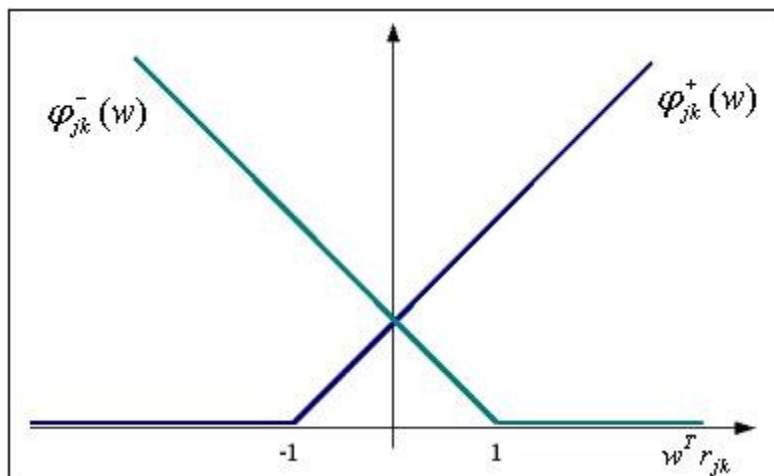
# Funkcja kryterialna CPL (1/2)

- Wyznaczenia hiperpłaszczyzny optymalnie rozdzielającej zbiory  $C^+$  i  $C^-$  można dokonać minimalizując regresyjno-rangową funkcję kryterialną

$$\Phi_r(w) = \sum_{(j,k) \in I^+} \varphi_{jk}^+(w) + \sum_{(j,k) \in I^-} \varphi_{jk}^-(w)$$

$$\varphi_{jk}^+(w) = \begin{cases} 1 - w^T r_{jk} & \text{jeżeli } w^T r_{jk} < 1 \\ 0 & \text{jeżeli } w^T r_{jk} \geq 1 \end{cases} \quad \varphi_{jk}^-(w) = \begin{cases} 1 + w^T r_{jk} & \text{jeżeli } w^T r_{jk} > -1 \\ 0 & \text{jeżeli } w^T r_{jk} \leq -1 \end{cases}$$

# Funkcja kryterialna CPL (2/2)





# Minimalizacja wartości funkcji kryterialnej CPL

---

- Minimalizacja wartości funkcji kryterialnej  $\Phi_r(w)$  może być dokonana za pomocą algorytmu wymiany rozwiązań bazowych, techniki zbliżonej do programowania liniowego.



# Zastosowanie liniowej transformacji rangowej w szeregowaniu zadań (1/2)

---

- Relacja następstwa (poprzedzania):

$$(O_i \prec O_j) \Leftrightarrow (\rho_{ji} = 1)$$

- Liniowe odwzorowanie rangowe:

$$t(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\rho}$$

- Zbiory różnicowe  $C^+$  i  $C^-$ :

$$C^+ = \{\mathbf{r}_{ji} = \boldsymbol{\rho}_j - \boldsymbol{\rho}_i : i < j \text{ oraz } O_i \prec O_j\}$$

$$C^- = \{\mathbf{r}_{ji} = \boldsymbol{\rho}_j - \boldsymbol{\rho}_i : i < j \text{ oraz } O_j \prec O_i\}$$

# Zastosowanie liniowej transformacji rangowej w szeregowaniu zadań (2/2)

- Model rangowy zachowuje wszystkie zależności pomiędzy zadaniami, wtedy i tylko wtedy, gdy wektor  $\mathbf{w}$  zapewnia liniowe rozdzielenie zbiorów  $C^+$  i  $C^-$
- Jeżeli wartość funkcji kryterialnej  $\Phi_r(\mathbf{w})$  jest równa 0, to wszystkie zależności pomiędzy zadaniami są zachowane przez model, zadania mogą być realizowane (są niesprzeczne).

# Przykład 1

## Dane

task	time	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
4	8	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
5	5	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
6	5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
7	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
8	9	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
9	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
10	7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

## Zbiory $C^+$ i $C^-$

$C^+$ :

$$r_{21} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$r_{32} = [-1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$r_{43} = [0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$r_{54} = [0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$r_{65} = [0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$r_{76} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$r_{87} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$r_{98} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$r_{109} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$C^-$ :

$\emptyset$

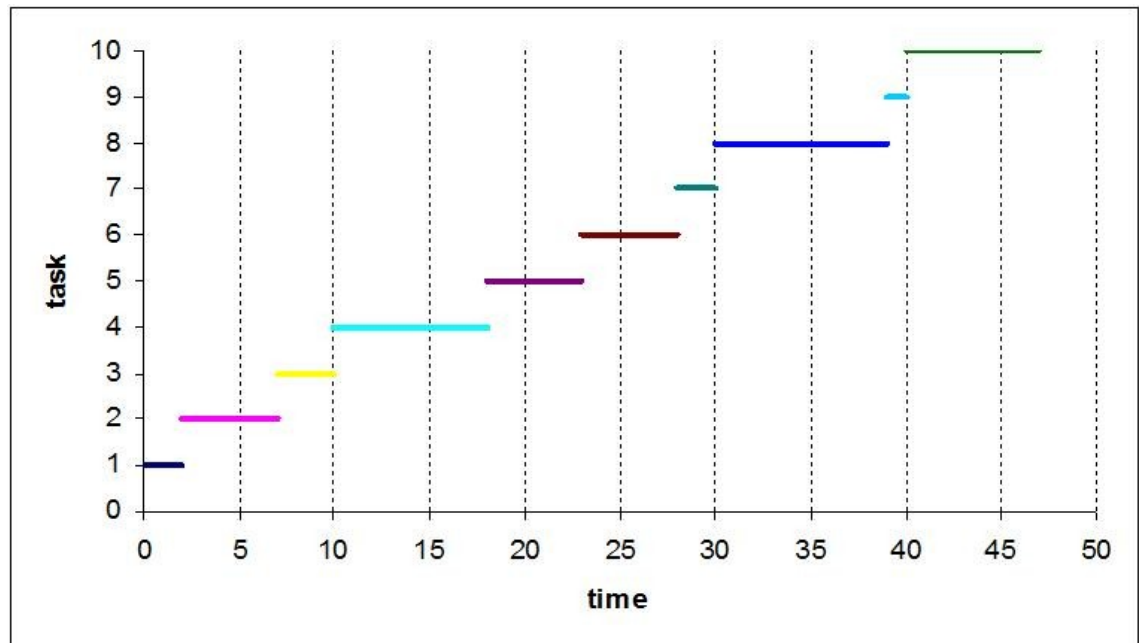
# Przykład 1

Model

$$\Phi = 0$$

$$w = [1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 0]$$

task	$t_i$	$t'_i$
1	0	2
2	1	7
3	2	10
4	3	18
5	4	23
6	5	28
7	6	30
8	7	39
9	8	40
10	9	47



# Przykład 2

## Dane

task	czas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	8	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
5	5	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
6	5	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
7	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	9	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
9	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
10	7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

## Zbiory $C^+$ i $C^-$

$C^+$ :

$$r_{21} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$r_{31} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$r_{43} = [-1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$r_{54} = [0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$r_{65} = [0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$r_{71} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$r_{87} = [-1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$r_{98} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$r_{109} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0]$$

$C^-$ :

$$r_{75} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$



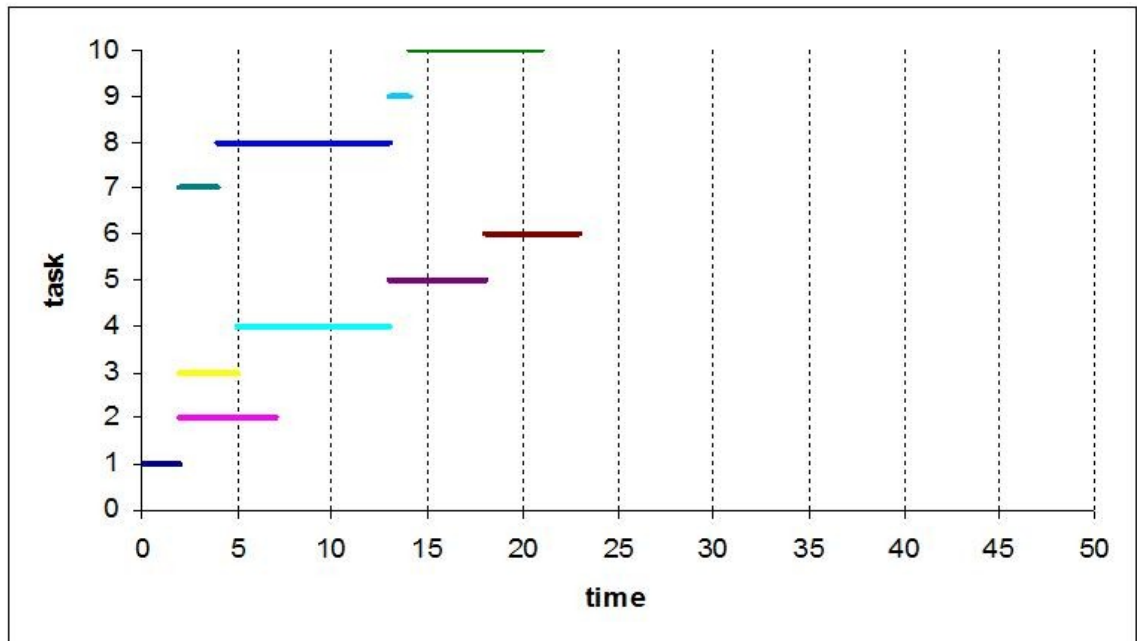
# Przykład 2

Model

$$\Phi = 0$$

$$w = [1 \ 0 \ 2 \ 3 \ 2 \ 0 \ 2 \ 3 \ 4 \ 0]$$

task	$t_i$	$t'_i$
1	0	2
2	1	7
3	1	5
4	2	13
5	3	18
6	4	23
7	1	4
8	2	13
9	3	14
10	4	21



# Przykład 3

## Dane

task	czas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	3	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
4	8	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
5	5	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
6	5	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0
7	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	9	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
9	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
10	7	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

## Zbiory $C^+$ i $C^-$

$C^+$ :

$$\begin{aligned}r_{21} &= [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\r_{31} &= [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\r_{43} &= [-1 \ 0 \ 1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\r_{54} &= [0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\r_{65} &= [0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\r_{71} &= [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\r_{87} &= [-1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \\r_{98} &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0] \\r_{109} &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 1 \ 0]\end{aligned}$$

$C^-$ :

$$\begin{aligned}r_{53} &= [-1 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \\r_{56} &= [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]\end{aligned}$$



# Przykład 3

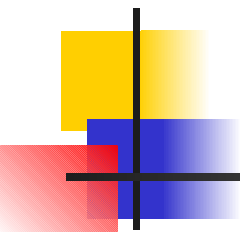
---

Model

$$\Phi = 0,16$$

$$w = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 3 \ 4 \ 0]$$

**Sprzeczność!!!**



Dziękuję za uwagę!